

УДК 338(100-87)
ББК У65.6

Д.Н. КАЧЕВСКИЙ

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ МАКРОЭКОНОМИКИ

Ключевые слова: макроэкономика, термодинамика, кластерная структура, бюджет.

Рассмотрены бюджетные кластерные структуры макроэкономических систем. Целью работы является их адекватное математическое описание. Математическое описание известных ранее n - и μ -кластеров обладало рядом недостатков: возникла необходимость введения дополнительного параметра n – иерархического параметра, вид зависимости макроэкономических величин от которого определял тип кластера, при этом использовался достаточно громоздкий математический аппарат; несмотря на то, что кластеры соответствовали достаточно большому временному промежутку (несколько лет), в течение этого времени число производственных единиц макроэкономической системы предполагалось неизменным, что ограничивало возможности применения математического описания. С целью преодоления указанных недостатков, а также для создания математического описания еще одного вида кластеров, ранее не рассматривавшихся, в работе предлагается новое математическое описание всех видов бюджетных кластерных структур. Такие структуры названы ν -кластерами. В качестве математического инструмента, так же как и раньше, используется термодинамический подход к макроэкономике, подчиняющийся статистике Бозе – Эйнштейна. Построено уравнение состояния макроэкономической системы. Для значения иерархического параметра выбирается его предельное значение $n = 1$. Всем типам кластеров, включая n - и μ -кластеры, дается единое описание. Имеет место чередование ν -кластеров, соответствующих падению рентабельности и ее росту, что может рассматриваться как «дыхание» макроэкономики. Каждый кластер характеризуется определенной динамикой основных макроэкономических параметров. Для ведущих экономик мира (США, Китая, Германии, Японии) дается описание таких кластерных структур. Единое описание всех видов кластеров создает новые возможности прогноза динамики основных макроэкономических параметров, а также эффективный механизм управления экономическими процессами.

D. KACHEVSKY

DYNAMIC PATTERNS OF MACROECONOMICS

Key words: macroeconomics, thermodynamics, cluster structure, budget.

The article is aimed to give an adequate mathematical description of budgetary cluster structures of macroeconomic systems. The mathematical description of the previously known n - and μ -clusters has a number of drawbacks: there was a need to introduce an additional parameter 'n' – a hierarchical parameter, the form of the dependence of macroeconomic quantities which determined the type of cluster; besides, that description involved quite a cumbersome mathematical apparatus; despite the fact that the clusters covered a sufficiently long time interval (a few years), the number of macroeconomic production units was assumed to remain unchanged within that period, which limited the possibility of applying mathematical description. This paper offers a new mathematical description applicable to all types of budget cluster, which is also aimed to overcome the disadvantages mentioned above, as well as to create a mathematical description of another form of clusters, which has never been considered before. Such structures are called ν -clusters. A thermodynamic approach to macroeconomics, which is conforming to Bose – Einstein statistics, is used as a mathematical tool, as before. The author has made up an equation to estimate the state of the macroeconomic system. The hierarchical parameter is assigned its limit value $n = 1$. A single description is provided for all types of clusters, including the n - and μ -clusters. There is an interchange of ν -clusters corresponding to a drop in profitability and its growth that can be considered as «breath» of macroeconomics. Each cluster is characterized by specific

dynamics of the main macroeconomic parameters. The article provides the description of such cluster structures relevant for the world's leading economies (the US, China, Germany, Japan). The unified description of all types of clusters creates new opportunities of prognosticating the dynamics of the main macroeconomic parameters, as well as an effective mechanism for economic management.

В работах [2–4] для описания макроэкономических систем (МКЭС) применялся термодинамический метод [7]. Рассматривалась модель идеальной равновесной бозе-МКЭС тождественных предприятий, распределение энергии которых представлялось статистикой Бозе – Эйнштейна.

В равновесном состоянии МКЭС первое начало термодинамики представлялось в форме $\delta Q = dU + \delta A - \mu dN$, смысл которой заключается в законе сохранения энергии: малое увеличение тепла системы на величину δQ расходуется на увеличение внутренней энергии системы dU , совершение системой работы $\delta A = DdC$ по увеличению C – объема рынка (совокупного спроса) на величину dC и на работу системы по созданию новых предприятий – μdN .

Здесь $D = N/x_r$ – деловая активность (число предприятий на единицу совокупных затрат МКЭС). Под понятием совокупного спроса понимается максимально возможный поток дохода при сколь угодно большом потоке совокупных затрат при фиксированной производственной мощности МКЭС, что равносильно суммарной денежной массе МКЭС.

Понятие теплоты МКЭС связывается с *теплотой* экономических отношений – уровнем экономических и информационных свобод.

Экономический смысл внутренней энергии предприятия связан со способностью предприятия осуществлять оптимизацию своей деятельности. С ростом скорости оптимизации растет и внутренняя энергия (прямая пропорциональность имеет место только при значении иерархического параметра $n = 1$). Понятию оптимизации придается широкий смысл – как оптимизации технологических процессов, оптимизации финансовых потоков и планов, изменению удельных весов различных производственных факторов, влияющих на структуру производственной функции предприятия и др.

Процесс оптимизации может быть направлен на достижение максимального значения прибыли, рентабельности, определенного уровня социально значимых факторов, минимизацию налоговых отчислений и др.

В рамках этого подхода имело место существование бюджетной кластерной структуры МКЭС – участков с линейной зависимостью логарифмов совокупных затрат МКЭС от логарифма их рентабельности. В работах [2– 4] давалось описание такой структуры как при равном нулю, так и при отличном от нуля μ – химическом потенциале. Из всех имеющихся кластеров были идентифицированы только два вида кластеров: n - и μ -кластеры на плоскости в дважды логарифмических координатах $(\ln x_r, \ln R)$, где $R = y_r/x_r$ – абсолютная рентабельность ежегодных совокупных затрат МКЭС; x_r – поток ежегодных совокупных затрат; y_r – соответствующий поток дохода.

В настоящей работе будет показано, что все типы кластеров, включая n - и μ -кластеры, допускают единое описание и могут рассматриваться как ν -кла-

стеры, соответствующие значению иерархического параметра $n = 1$. Единая кластерная ν -структура обнаруживается практически во всех ведущих экономиках мира. Мы рассмотрим ее для США, Китая, Японии и Германии. Имеет место чередование ν -кластеров, соответствующее падению рентабельности и ее росту. Каждый кластер характеризуется определенной динамикой основных макроэкономических параметров.

В рамках единого описания кластерной структуры МКЭС сам процесс перехода от одного кластера к последующему может трактоваться естественным образом как процесс «дыхания» МКЭС – периодический процесс, при котором фазы «вдоха» и «выдоха» (соответственно, рост и падение рентабельности совокупных затрат) сменяют друг друга, чередуясь во времени.

1. Уравнение состояния МКЭС. Рассмотрим равновесное состояние бозе-МКЭС с химическим потенциалом μ , отличным от нуля, тогда первое начало термодинамики принимает вид $\delta Q = dU + \delta A - \mu dN$, где последнее слагаемое представляет неотрицательную работу системы по созданию новых предприятий ($\mu < 0$).

Для внутренней энергии каждого предприятия МКЭС выбираем значение [3, формула (2.36)]

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{p}{m} \right)^n \quad (1.1)$$

с каноническим импульсом p , отрицательное значение которого связано с уменьшением канонической координаты q – ошибки инвестирования, в процессе выравнивания, т.е. в процессе перехода МКЭС в равновесное состояние, при стремлении системы к оптимальному значению экономических параметров, по которым проводится оптимизация. Очевидно, что ошибка инвестирования не может превышать значения C ; n – иерархический параметр; m – параметр, определяющий инерционные свойства оптимизации.

Внутренняя энергия МКЭС, согласно [3, формула (2.37)], представляется интегралом по всему фазовому пространству параметров (q, p) с элементом объема $d\Gamma = dq dp$:

$$U = \frac{g}{h} \int \frac{\varepsilon d\Gamma}{e^{(\varepsilon - \mu)/kR} - 1} = \frac{g}{h} \int \frac{(1/n)(-p/m)^n d\Gamma}{\exp\left[\frac{(-p/m)^n}{n k R} - \frac{\mu}{kR}\right] - 1}, \quad (1.2)$$

который принимает вид

$$U = \frac{g}{h} \int_0^C dq \int_{-\infty}^0 \frac{(1/n)(-p/m)^n dp}{\exp\left[\frac{(-p/m)^n}{n k R} - \frac{\mu}{kR}\right] - 1} = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{1-1/n}} \int_0^\infty \frac{x^{1/n} dx}{\exp(x-a)-1}, \quad (1.3)$$

$$x \equiv \frac{1}{n k R} \left(-\frac{p}{m} \right)^n, \quad a \equiv \frac{\mu}{k R} < 0, \quad (1.4)$$

где k – экономическая постоянная Больцмана; g – параметр вырождения; h – экономическая постоянная Планка; C – объем рынка (совокупный спрос).

Поскольку химический потенциал предполагается отрицательным во внутренних точках области интегрирования, подынтегральная функция оказывается ограниченной.

Для вычисления интеграла воспользуемся частным случаем табличного интеграла 3.411(6) [1],

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1} dx}{e^x - \lambda} = \Gamma(\nu) \cdot {}_1F_1(\lambda, \nu; 1), \quad (1.5)$$

($|\lambda| \leq 1, \lambda \neq 1, \operatorname{Re} \nu > 0$; либо $\lambda = 1, \operatorname{Re} \nu > 1$), тогда для внутренней энергии системы имеет место выражение

$$U = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{1-1/n}} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/n} dx}{\exp(x-a)-1} = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{1-1/n}} e^a \int_0^{\infty} \frac{x^{1/n} dx}{e^x - e^a}, \quad (1.6)$$

и с учетом обозначений (1.4) внутренняя энергия системы оказывается равной

$$U = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{1-1/n}} e^{\frac{\mu}{kR}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot {}_1F_1\left(e^{\frac{\mu}{kR}}, 1 + \frac{1}{n}; 1\right). \quad (1.7)$$

Вырожденная гипергеометрическая функция может быть представлена рядом

$${}_1F_1(x, y; z) \equiv \Phi(x, y; z) = 1 + \frac{x}{y} \frac{z}{1!} + \frac{x(x+1)}{y(y+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (1.8)$$

Для числа предприятий МКЭС, согласно [2, формула (2.47)], имеет место выражение

$$N = \frac{g}{h} \int \frac{d\Gamma}{e^{(\varepsilon-\mu)/kR} - 1}. \quad (1.9)$$

Интегрирование по всему фазовому пространству, аналогично (1.3), приводит к выражению

$$N = \frac{g}{h} \frac{C}{m} \frac{m (kR)^{1/n}}{n^{1-1/n}} e^{-a} \int_0^{\infty} \frac{x^{-1+1/n}}{e^x - e^a} dx = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1/n}}{n^{1-1/n}} e^{-a} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot {}_1F_1\left(e^a, \frac{1}{n}; 1\right). \quad (1.10)$$

Поскольку при фиксированных значениях объема рынка C и общем числе предприятий N химический потенциал, неявно определенный уравнением (1.10), оказывается зависящим только от абсолютной рентабельности R , рассмотрим предельную ситуацию, когда химический потенциал $\mu \rightarrow 0$, при этом параметр $a \rightarrow 0$, тогда предельное значение абсолютной рентабельности R_0 может быть представлено в виде

$$R_0 = \frac{1}{nk} \left(\frac{N h n}{g C m \Gamma(1/n) \cdot {}_1F_1(1, 1/n; 1)} \right)^n, \quad (1.11)$$

а внутренняя энергия системы может быть записана в виде

$$U = N k R \frac{(R/R_0)^{1/n}}{n^{1/n} e^{-\mu/kR}} \cdot \frac{{}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, 1 + \frac{1}{n}; 1\right)}{{}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right)}. \quad (1.12)$$

При этом выражение (1.11) для общего количества предприятий системы можно представить уравнением

$${}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right) = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/n} \cdot e^{\mu/kR} \cdot {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, \frac{1}{n}; 1\right), \quad (1.13)$$

которое неявно определяет химический потенциал $\mu \leq 0$ как убывающую функцию R – абсолютной рентабельности в области $R \geq R_0$.

Для нахождения термодинамического Ω -потенциала воспользуемся формулой [3, (2.33)]

$$\Omega = U - R S - \Phi = \frac{k g R}{h} \int \ln(1 - e^{(\mu-\varepsilon)/kR}) d\Gamma. \quad (1.14)$$

Интегрируем по всему фазовому пространству

$$\Omega = \frac{k g R}{h} \left[\int_0^C dq \int_{-\infty}^0 \ln(1 - \exp\left(\frac{\mu}{k R} - \frac{(-p/m)^n}{n k R}\right)) dp \right]. \quad (1.15)$$

Интегрирование по импульсу проводим по частям, учитывая, что внеинтегральный член обращается в нуль как на верхнем, так и на нижнем пределах:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{kgRCm (kR)^{1/n}}{h n^{1-1/n}} \left[\int_0^\infty x^{-1+1/n} \ln(1 - \exp(a-x)) dx \right] = \\ &= \frac{kgRCm (kR)^{1/n}}{h n^{-1/n}} \left[\int_0^\infty \ln(1 - e^{a-x}) dx^{1/n} \right] = \\ &= \frac{kgRCm (kR)^{1/n}}{h n^{-1/n}} \left[- \int_0^\infty \frac{x^{1/n}}{1 - e^{a-x}} e^{a-x} dx \right] = \\ &= n \frac{Cmg (kR)^{1+1/n} e^a}{h n^{1-1/n}} \left[\int_0^\infty \frac{x^{1/n}}{e^x - e^a} dx \right] = -n U. \end{aligned} \quad (1.16)$$

С учетом равенства $\Omega = -D C$ уравнение состояния МКЭС может быть представлено в виде

$$D = \frac{mg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{-1/n}} e^{\mu/kR} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, 1 + \frac{1}{n}; 1\right). \quad (1.17)$$

Вводя параметр R_0 в соответствии с формулой (1.11) и исключая параметр mg/h , получаем новую форму уравнения состояния МКЭС, и вместе с уравнением (1.13), определяющим неявно химический потенциал, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} DC &= N k R \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/n} e^{\mu/kR} {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, 1 + 1/n; 1\right) / {}_1F_1\left(1, 1/n; 1\right), \\ {}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right) &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/n} \cdot e^{\mu/kR} \cdot {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, \frac{1}{n}; 1\right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

которая может быть названа *общим уравнением состояния* бозе-МКЭС. Уравнение может быть представлено и в *канонической форме*:

$$D C = N k_{\mu} R, \quad (1.19)$$

$$k_{\mu} \equiv {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, 1+1/n; 1\right) / {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, 1/n; 1\right). \quad (1.20)$$

С учетом определения макроэкономических параметров D – деловой активности, R – абсолютной рентабельности и K – конкурентоспособности МКЭС как уровня удовлетворения спроса

$$D \equiv \frac{N}{x_r}; \quad R \equiv \frac{y_r}{x_r}; \quad K \equiv \frac{y_r}{C}, \quad (1.21)$$

каноническое уравнение состояния (1.19) определяет модифицированную экономическую постоянную Больцмана k_{μ} как величину, обратную конкурентоспособности МКЭС

$$k_{\mu} \equiv \frac{C}{y_r}. \quad (1.22)$$

2. Оценка величины химического потенциала МКЭС. Представим второе уравнение общего уравнения состояния бозе-МКЭС (1.18), неявно определяющее μ -химический потенциал МКЭС, в виде

$${}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/n} = e^{\mu/kR} \cdot {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, \frac{1}{n}; 1\right), \quad 0 < x \leq 1 \quad (2.1)$$

и после введения обозначений преобразуем его следующим образом:

$$q = x \Phi(x, y; 1); \quad q \equiv {}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right) \left(R_0/R\right)^{1/n}, \quad x \equiv e^{\mu/kR} \quad y \equiv 1/n; \quad y \geq 1. \quad (2.2)$$

Поскольку имеет место легко проверяемое свойство

$$(x + p)/(y + p) \geq x/y \equiv a, \quad (p > 0, a \leq 1), \quad (x \leq y), \quad (2.3)$$

для вырожденной гипергеометрической функции выполняются неравенства

$$\exp\left(\frac{xz}{y}\right) < \Phi(x, y; z) < 1 + \frac{x}{y}(e^z - 1), \quad (2.4)$$

откуда параметра x удовлетворяет неравенству

$$x \exp\left(\frac{x}{y}\right) < q < x + \frac{x^2}{y}(e - 1), \quad (2.5)$$

решая которое относительно x с использованием функции Ламберта [8], для химического потенциала получаем оценку

$$M_1 \equiv \ln \left[\frac{-y + \sqrt{y^2 + 4 y q (e - 1)}}{2(e - 1)} < x < y \text{ Lambert}W\left(\frac{q}{y}\right), \right. \\ \left. < \ln \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 4n(e - 1) {}_1F_1(1, 1/n, 1)(R_0/R)^{1/n}}}{2 n (e - 1)} < \frac{\mu}{kR} < \right. \right. \\ \left. \left. < \ln \left[\frac{1}{n} \text{Lambert}W\left(n {}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/n}\right) \right] \right] \equiv M_2. \quad (2.6)$$

В качестве оценки химического потенциала может быть выбрана величина

$$\mu \approx kR(M_1 + M_2)/2. \quad (2.7)$$

Здесь $y = LambertW(x)$ – функция Ламберта, которая удовлетворяет алгебраическому уравнению $y \cdot e^y = x$, ($y \geq -1$).

3. v -кластеры макроэкономической системы. Логарифмическая линеаризация уравнения состояния. Для единого описания всех видов кластеров достаточно иерархический параметр n считать равным единице, что обеспечивает высокую точность аппроксимации химического потенциала (2.7). В этом случае при $n = 1$ имеет место приближенное равенство

$$x \equiv \exp(\mu/kR) \approx \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4(e-1)q}} \cdot \sqrt{LambertW(q)/(2e-2)}; \quad (3.1)$$

$$q \equiv e R_0/R.$$

Значение параметра R_0 , определенное выражением (1.11), принимает вид

$$R_0 = N h/(k g C m e), \quad (n = 1). \quad (3.2)$$

Каноническое уравнение состояния МКЭС представим в виде

$$D C = N k R {}_1F_1(x, 2; 1)/{}_1F_1(x, 1; 1), \quad (n = 1). \quad (3.3)$$

где C – совокупный спрос МКЭС; D – деловая активность; ${}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция

$$D = N/x_r; \quad R \equiv y_r/x_r. \quad (3.4)$$

После сокращения на множитель N – число предприятий (производственных единиц) уравнение состояния записывается в виде

$$x_r = (C/kR) {}_1F_1(x, 1; 1)/{}_1F_1(x, 2; 1). \quad (3.5)$$

Из уравнения поверхности $x_r(C, R)$ следуют свойства:

1° При $C = \text{const}$ рост рентабельности R сопровождается уменьшением совокупных затрат x_r ;

2° При росте совокупного спроса рост рентабельности может сопровождаться увеличением совокупных затрат x_r ;

3° При падении совокупного спроса C рост рентабельности R может сопровождаться уменьшением совокупных затрат x_r .

Логарифмируя уравнение (3.5), получаем выражение

$$lx = -\tilde{\eta} - lr - \ln({}_1F_1(x(lr), 2; 1)/{}_1F_1(x(lr), 1; 1)), \quad (3.6)$$

($lx \equiv \ln x_r$; $lr \equiv \ln R$; $\tilde{\eta} \equiv \ln(k/C)$), где введены обозначения с учетом соотношения (3.1):

$$x(lr) \equiv \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4(e-1)\tilde{Q}}} \cdot \sqrt{LambertW(\tilde{Q})/(2e-2)};$$

$$\tilde{Q} \equiv R_0 \exp(1 - lr). \quad (3.7)$$

Перечисленные свойства могут быть использованы для получения зависимостей $\ln x_r(\ln R)$, участвующих в описании кластерных структур МКЭС. Действительно, степенная зависимость совокупного спроса от абсолютной рентабельности

$$C = C_0 \cdot R^\alpha, \quad (3.8)$$

наличие которой будем считать свойством нового типа кластеров, ν -кластеров, дает возможность сделать указанные зависимости $\ln x_r$ ($\ln R$) практически линейными, что и наблюдается в реальности (см. рис. 1–4).

Получим рабочую формулу для уравнения средней линии любого ν -кластера, проведя перенормировку параметра $\tilde{\eta}$:

$$\tilde{\eta} = \ln(k/C_0 R^\alpha) = \eta - \alpha \ln R, \quad \eta \equiv \ln(k/C_0). \quad (3.9)$$

Искомое уравнение средней линии любого ν -кластера с помощью уравнения (3.6) тогда представляется в виде ν -прямой

$$lx = -\eta + \alpha lr - lr - \ln({}_1F_1(x(lr), 2; 1) / {}_1F_1(x(lr), 1; 1)). \quad (3.10)$$

Уравнение определяет и зависимость $R(x_r)$ – абсолютной рентабельности от совокупных затрат в кластере как неявную функцию.

Легко показать, что степенная зависимость совокупного спроса от абсолютной рентабельности (3.8) влечет и соответствующую степенную зависимость общего числа производственных единиц системы

$$N = N_0 R^\alpha. \quad (3.11)$$

Введение понятия ν -кластера дает возможность описания всей бюджетной кластерной структуры МКЭС с единых позиций, включая в описание и n -, μ -кластеров.

4. Кластерная структура экономики США. Проверим возможность описания кластеров с помощью соотношения (3.10) для экономики США, воспользовавшись данными федерального бюджета США с 1901 г. по 2012 г. (y_r – его доходная часть; x_r – расходная часть, млн долл. США).

На рис. 1 построен график зависимости $\ln R$ от $\ln x_r$. Каждая вершина ломаной линии соответствует одному годовому бюджету. Временную связь бюджетов представляем прямыми, соединяющими две соседние вершины.

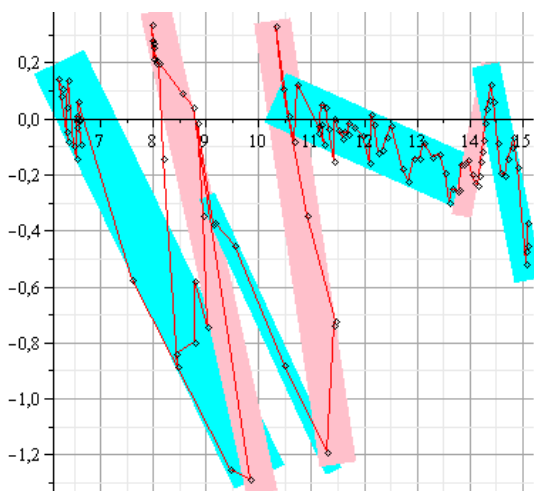


Рис. 1. Кластерная структура федерального бюджета США периода 1901–2012 гг. с отражением временной связи вершин (одна вершина – один годовое бюджет; размерность финансовых потоков – млн долл. США) в осях ($\ln R$, $\ln x_r$).

Характеризуется чередующимися во времени падением и ростом рентабельности

Из графика рис. 1 следует, что точки, соответствующие годовым бюджетам, располагаются вдоль некоторых выделенных направлений, образуя кластеры, которые изображаем с помощью полос.

Каждый кластер характеризуется определенным наклоном, соответствующим отклику экономики – определенному темпу изменения рентабельности при изменении годовых совокупных затрат. Кластеры будем представлять средними прямыми линиями (v -прямыми).

Для семи кластеров США, изображенных на рис. 1, уравнения v -прямых, а также зависимость совокупного спроса от абсолютной рентабельности (3.8) представляются в виде

$$\begin{aligned} \text{№ 1 } \ln R &= 2,62 - 0,39 \ln x_{r,1}, \quad x_{r,1} \in [525 \dots 18\,493]; \quad C_1 = C_{01} \cdot R^{-1,5}; \\ \text{№ 2 } \ln R &= 7,33 - 0,8625 \ln x_{r,2}, \quad x_{r,2} \in [18\,493 \dots 13\,653]; \quad C_2 = C_{02}; \\ \text{№ 3 } \ln R &= 3,42 - 0,41 \ln x_{r,3}, \quad x_{r,3} \in [13\,653 \dots 78\,555]; \quad C_3 = C_{03} R^{-1,27}; \\ \text{№ 4 } \ln R &= 13,256 - 1,26 \ln x_{r,4}, \quad x_{r,4} \in [78\,555 \dots 45\,514]; \quad C_4 = C_{04} R^{0,31}; \\ \text{№ 5 } \ln R &= 0,93 - 0,083 \ln x_{r,4} x_{r,5} \in [45\,514 \dots 1\,253\,130]; \quad C_5 = C_{05} \cdot R^{-11}; \\ \text{№ 6 } \ln R &= -14,058 + 0,99 \ln x_{r,6}, \quad x_{r,6} \in [1\,253\,130 \dots 1\,702\,035]; \quad C_6 = C_{06} R^2; \\ \text{№ 7 } \ln R &= 13,92 - 0,96 \ln x_{r,7}, \quad x_{r,7} \in [1\,702\,035 \dots 3\,538\,000]; \quad C_7 = C_{07}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Степенная зависимость (3.8) определяется наклоном v -прямой (4.2), представляющей v -кластер. Временные интервалы кластеров: первый кластер – (1901–1919 гг.); второй кластер – (1919–1941 гг.); третий кластер – (1941–1943 гг.); четвертый кластер – (1943–1951 гг.); пятый кластер – (1951–1990 гг.); шестой кластер – (1990–1999 гг.); седьмой кластер – (1999–2012 гг.).

Согласно [3, 4], первый и третий кластеры являлись n -кластерами, наклон которых однозначно задавал значение иерархического параметра $0 < n < 1$. Вторым и седьмым кластерами (в обозначениях [4] – это второй и четвертый) являлись μ -кластерами.

Описание этих четырех кластеров подразумевало постоянство общего числа предприятий (производственных единиц) МКЭС. Четвертый и шестой кластеры не могли быть описаны в рамках такого ограничения. Для их описания необходимо считать число предприятий системы величиной переменной, зависящей от абсолютной рентабельности инвестиций R в соответствии с (3.11). Характер этой зависимости определяется наклоном соответствующих кластеров.

Расположение кластеров таково, что имеет место чередование областей возрастания и убывания рентабельности ежегодных совокупных затрат (федерального бюджета США). Причем рост рентабельности возможен как при росте (шестой кластер) совокупных затрат, так и при их уменьшении (второй и четвертый кластеры). Уменьшение же рентабельности имеет место во всех остальных кластерах с нечетными номерами. При этом наблюдается некий аналог «дыхания» МКЭС.

Действительно, если считать «вдохом» кластер, соответствующий росту рентабельности, а «выдохом» – кластер, соответствующий ее падению, то имеет место чередование «вдохов» и «выдохов». Причем «вдохи» (кластеры с

четными номерами) оказываются двух видов: а) собственно «вдох» – когда рост рентабельности сопровождается ростом совокупных затрат (шестой кластер); б) «вдох с противодыханием», когда рост рентабельности происходит при падением совокупных затрат (второй, четвертый кластеры).

Для единого описания различного рода кластеров как v -кластеров необходимо, чтобы химический потенциал был отличен от нуля. Достаточно поэтому в качестве значения R_0 выбрать наименьшее наблюдаемое значение абсолютной рентабельности, соответствующее таковому в 1919 г., т.е.

$$R_0 = R_{\min} = R_{1919} = 0,2774022603 . \quad (4.2)$$

После определения наклона v -прямой каждого кластера для необходимого сдвига прямой по оси абсцисс (ось $\ln x_r \equiv lx$) определяется значение параметра сдвига η , соответствующего точке $lr = 0$ ($R = 1$):

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -6,393864; \quad \eta_2 = -8,243864; \quad \eta_3 = -8,043864; \quad \eta_4 = -10,243864; \\ \eta_5 &= -10,943864; \quad \eta_6 = -13,943864; \quad \eta_7 = -14,243864 . \end{aligned} \quad (4.3)$$

По второй формуле (3.9) по найденным значениям параметров сдвига определяются постоянные величины:

$$\begin{aligned} C_{01} &= 600 k_1; \quad C_{02} = 3800 k_2; \quad C_{03} = 3100 k_3; \quad C_{04} = 28100 k_4; \\ C_{05} &= 57000 k_5; \quad C_{06} = 1,1 \cdot 10^6 k_6; \quad C_{07} = 1,5 \cdot 10^6 k_7 . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таким образом, зависимость совокупного спроса МКЭС в семи v -кластерах представляется как

$$\begin{aligned} C_1 &\approx 600 R^{-1,5} k_1; \quad C_2 \approx 3800 R^0 k_2; \quad C_3 \approx 3100 R^{-1,27} k_3; \\ C_4 &\approx 28100 R^{0,31} k_4; \quad C_5 \approx 57000 R^{-11} k_5; \\ C_6 &\approx 1,1 \cdot 10^6 R^2 k_6; \quad C_7 \approx 1,5 \cdot 10^6 k_7 . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для нахождения значений экономической постоянной Больцмана (для разных кластеров эти значения разные) v -кластеров воспользуемся понятием абсолютного показателя инфляции [5, 6] .

$$a_{ii} \equiv \frac{C}{x_r + y_r} = \frac{C}{x_r (1 + R)} , \quad (4.6)$$

который в 2007 г. в экономике США принимал наименьшее значение $a_{ii}(2007 \text{ г.}) = 4$, соответствующее началу ипотечного кризиса США. В 2007 г. совокупные затраты равнялись $x_{r,7} = 2728700$. Этот характерный год мы и выберем для идентификации значения экономической постоянной Больцмана седьмого кластера. Значение абсолютной рентабельности в этом году $R_{2007} = 0,735973$. С учетом определения (4.6) запишем уравнение для нахождения k_7 и решим его:

$$4 = \frac{C_7}{x_{r,7}(1 + R_7)} \equiv \frac{1,5 \cdot 10^6 k_7}{2728700(1 + 0,735973)} \Rightarrow k_7 \approx 12,346.$$

Для нахождения значений экономической постоянной Больцмана других кластеров воспользуемся требованием непрерывности совокупного спроса

МКЭС в точках пересечения кластеров lr_{mn} , соответствующих пересечению m -го и n -го кластеров из списка кластеров (4.1):

$$lr_{01} \approx 0,28; lr_{12} = -1,27; lr_{23} = -0,13; lr_{34} = -1,33;$$

$$lr_{45} = 0,061; lr_{56} = -0,23; lr_{67} = 0,15; lr_{70} \approx -0,48,$$

где нулевой значок обозначает левую и правую границы первого и седьмого кластеров, соответственно.

Условия непрерывности и соответствующие значения экономической постоянной Больцмана представим в виде

$$C_6(\exp(lr_{67})) = C_7(\exp(lr_{67})); \Rightarrow k_6 = 12,44;$$

$$C_5(\exp(lr_{56})) = C_6(\exp(lr_{56})); \Rightarrow k_5 = 12,67;$$

$$C_4(\exp(lr_{45})) = C_5(\exp(lr_{45})); \Rightarrow k_4 = 12,83;$$

$$C_3(\exp(lr_{34})) = C_4(\exp(lr_{34})); \Rightarrow k_3 = 14,18;$$

$$C_2(\exp(lr_{23})) = C_3(\exp(lr_{23})); \Rightarrow k_2 = 13,69;$$

$$C_1(\exp(lr_{12})) = C_2(\exp(lr_{12})); \Rightarrow k_1 = 12,98.$$

Динамика совокупного спроса (зависимость от абсолютной рентабельности) (4.5) во всех семи кластерах теперь полностью определена.

Аналогично динамику конкурентоспособности МКЭС получим с учетом определения абсолютной рентабельности i -го кластера

$$K_i(R) \equiv \frac{y_{ri}}{C_i} = \frac{x_{ri} R}{C_i(R)}, \quad (i = \overline{1, 7}),$$

где зависимость $x_{ri}(R)$ находим из уравнений средних линий кластеров (4.1)

$$x_{r1} \approx e^{6,7} R^{-2,6}; x_{r2} = e^{8,5} R^{-1,16}; x_{r3} = e^{8,3} R^{-2,4}; x_{r4} = e^{10,5} R^{-0,79};$$

$$x_{r5} = e^{11,2} R^{-12}; x_{r6} = e^{14,2} R^1; x_{r7} = e^{14,5} R^{-1}. \quad (4.7)$$

Аналогично находим зависимость абсолютного показателя инфляции (4.6) от абсолютной рентабельности с учетом полученной зависимости (4.7). Аналогичным образом легко определяется и динамика других параметров МКЭС.

5. Кластерная структура федерального бюджета Китая. Рассмотрим бюджетную кластерную структуру МКЭС Китая на временном промежутке 1982–2012 гг. Размерность потоков совокупных затрат x_r , совокупных доходов y_r и совокупного спроса C – млрд юаней. Кластерная структура бюджета Китая представлена на рис. 2: первый кластер (1982–1999 гг.); второй кластер (1999–2007 гг.); третий кластер (2007–2012 гг.)

Расположение кластеров таково, что имеет место чередование областей возрастания и убывания абсолютной рентабельности ежегодных совокупных затрат. Рост рентабельности оказывается возможным только при росте (второй кластер) совокупных затрат. Уменьшение абсолютной рентабельности имеет место в двух других (первом и третьем) кластерах. Отмеченный выше некий аналог дыхания МКЭС наблюдается и в экономике Китая.

В качестве R_0 берем минимальное на этом периоде значение абсолютной рентабельности, соответствующее 1999 г., т.е. $R_0 = R_{\min} = R_{1999} = 0,78$.

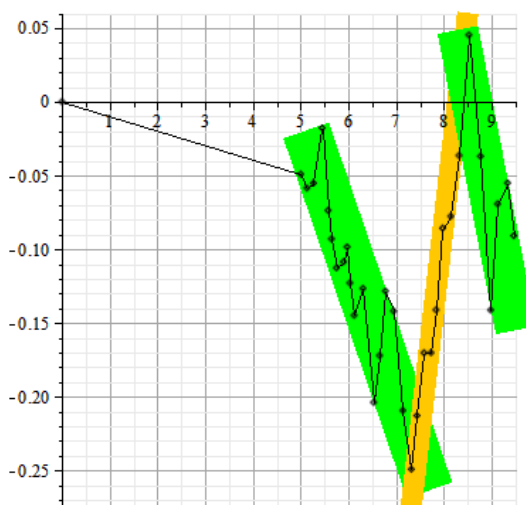


Рис. 2. Кластерная структура государственного бюджета Китая 1982–2012 гг. с отражением временной связи вершин (одна вершина – один годовой бюджет) в осях $(\ln R, \ln x_r)$

Уравнения средних линий трех кластеров (отсчет слева направо):

первый кластер: $\ln R = 0,46 - 0,094 \ln x_{r1}$, $x_{r1} \in [148,3... 1505,26]$;

второй кластер: $\ln R = -2,32 + 0,28 \ln x_{r2}$, $x_{r2} \in [1505,26... 5022,74]$;

третий кластер: $\ln R = 1,46 - 0,17 \ln x_{r3}$, $x_{r3} \in [5022,74... 1287,58]$.

Параметры α , η для каждого из трех кластеров: $\alpha_1 = -9,5$; $\eta_1 = -4,453$; $\alpha_2 = 4,65$; $\eta_2 = -7,863$; $\alpha_3 = -4,66$; $\eta_3 = -8,163$.

Зависимость совокупного спроса от абсолютной рентабельности:

$$C_1 = C_{01} R^{-9,5}; C_2 = C_{02} R^{4,65}; C_3 = C_{03} R^{-4,66};$$

$$C_{01} = 85,89 k_1; C_{02} = 2599,46 k_2; C_{03} = 3508,90 k_3.$$

Для определения значений экономической постоянной Больцмана сделаем замечание по поводу структуры совокупного спроса.

В нашем определении совокупного спроса эта величина представляет собой наиболее возможный поток совокупного дохода МКЭС. Она зависит как от объема производственных мощностей, так и от суммарной денежной массы, частью которой обладают потребители, а частью – производители.

С одной стороны, увеличение денежной массы приводит к росту цен [6], с другой – к росту потока дохода после реализации конечного продукта. В то же время в системе возможен достаточно большой спланированный или неспланированный *вброс* денежной массы (*скрытая денежная масса*). Это могут быть внешние кредиты и валютная интервенция и открытие ранее закрытых валютных резервов, как известных, так и тайных. Каким образом они могут повлиять на величину совокупного дохода, это зависит от множества случайных и неслучайных факторов.

Проведем *виртуальную нормировку* скрытой денежной массы, будем, к примеру, считать, что реальная денежная масса, участвующая в процессе

производства и реализации конечного продукта МКЭС, составляет 20% от всей денежной массы. Тогда в качестве условия нормировки считаем, что максимальный поток совокупных затрат может составлять $\max x_r = 0,2 C$.

Реальная же величина совокупных затрат МКЭС зависит от уровня развития экономики, состояния экономики в тот или иной момент времени. Такое состояние может быть описано функцией цикла [5, 6], используя которую, представим величину совокупных затрат как $x_r = 0,2 C \Omega(t)$.

Определим функцию цикла экономики Китая, поскольку максимальное значение абсолютной рентабельности достигалось в 2007 г. как

$$\Omega(t) \equiv R(t)/R_{\max}, R_{\max} \equiv \max_{t \in T} R(t) = 1,0463; T = [1982 - 2012 \text{ гг.}]$$

Характерной точкой в динамике абсолютной рентабельности является точка наименьшей рентабельности $R_0 = R_{\min} = R_{1999} = 0,78$. Ее мы и выберем для нахождения экономической постоянной Больцмана первого ν -кластера.

Имеет место уравнение $x_{r,1}(R_0) = 0,2 C_1(R_0) R_0 / R_{\max}$, решением которого является значение $k_1 = 13,744$. Для других кластеров находим соответствующие значения констант из требования непрерывности функции совокупного спроса $C(R)$:

$$\begin{aligned} C_1(e^{k_1 R_0}) &= C_2(e^{k_2 R_0}) & \Rightarrow k_2 &= 13,309; \\ C_2(e^{k_2 R_0}) &= C_3(e^{k_3 R_0}) & \Rightarrow k_3 &= 13,281. \end{aligned}$$

Теперь динамика совокупного спроса, абсолютного показателя инфляции, конкурентоспособности МКЭС, как и других макроэкономических параметров (зависимость от абсолютной рентабельности), легко определяется аналогично тому, как это было сделано для экономики США.

6. Кластерная структура государственного бюджета Японии. Рассмотрим ν -кластерную структуру МКЭС Японии на временном промежутке 1982–2010 гг. Размерность потоков совокупных затрат x_r , совокупных доходов y_r и совокупного спроса C – млрд йен.

Кластерная структура экономики Японии представлена на рис. 3 в дважды логарифмических координатах ($\ln R, \ln x_r$): первый кластер (1982–1992 гг.); второй кластер (1992–2010 гг.). Расположение кластеров таково, что имеет место чередование областей возрастания и убывания R – абсолютной рентабельности ежегодных совокупных затрат. Рост рентабельности оказывается возможным только при росте (первый кластер) совокупных затрат. Уменьшение абсолютной рентабельности имеет место во втором кластере. При этом отмеченный выше некий аналог дыхания МКЭС наблюдается и в экономике Японии. Приведем основные параметры расчета ν -кластерной структуры бюджета Японии $R_0 = R_{\min} = R_{2005} = 0,7821011695$. Максимальное значение абсолютной рентабельности, имевшее место в 1992 г., $R_{\max} = R_{1992} = 1,063694488$; значение функции цикла экономики Японии в 2005 г. $\Omega_{2005} = R_{2005} / R_{1992} = 0,735268611$. Параметры сдвига и показатели степени ($\alpha_1 = 3,22$; $\eta_1 = -11,21$), ($\alpha_2 = 0,06$; $\eta_2 = -11,47$);

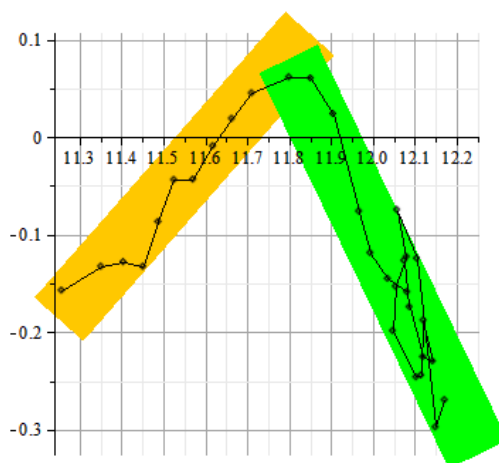


Рис. 3. Кластерная структура государственного бюджета Японии на временном промежутке 1982–2010 гг. с временной связью вершин (одна вершина – один годовой бюджет) в осях $(\ln x_r, \ln R)$ характеризуется чередующимися во времени падением и ростом рентабельности

По найденным параметрам α определяем, в соответствии с формулой (1.6), зависимость совокупного спроса от абсолютной рентабельности $C_1 = C_{01} R^{3,22}$; $C_2 = C_{02} R^{0,06}$. $C_{01} \approx 74051 k_1$; $C_{02} \approx 96039 k_2$.

Проведя нормировку скрытой денежной массы МКЭС Японии и используя понятие функции цикла, представим величину совокупных затрат как $x_r = 0,2 C \Omega(t)$.

Определим функцию цикла экономики Японии как $\Omega(t) \equiv R(t)/R_{\max}$.

Характерной точкой в динамике абсолютной рентабельности является точка наименьшей рентабельности, соответствующая второму v -кластеру. Ею мы и воспользуемся для нахождения экономической постоянной Больцмана второго кластера:

$$x_{r,2}(R_0) = 0,2 C_2(R_0) R_0 / R_{\max} \Rightarrow k_2 \approx 13,75.$$

Значение $k_1 \approx 13,79$ можно найти из условия непрерывности совокупного спроса.

Динамика основных макроэкономических параметров Японии определяется по приведенной выше методике.

7. Кластерная структура федерального бюджета Германии. Кластерная структура экономики Германии периода 1991–2012 гг. состоит из семи последовательных во времени линейных кластеров: первый кластер (1991–1994 гг.); второй кластер (1994–1995 гг.); третий кластер (1995–2000 гг.); четвертый кластер (2000–2003 гг.); пятый кластер (2003–2007 гг.); шестой кластер (2007–2010 гг.); седьмой кластер (2010–2012 гг.), см. рис 4. Размерность всех финансовых потоков – млрд евро. $R_0 = R_{\min} = R_{1995} = 0,8270696711$, $R_{\max} = R_{2000} = 1,025212268$.

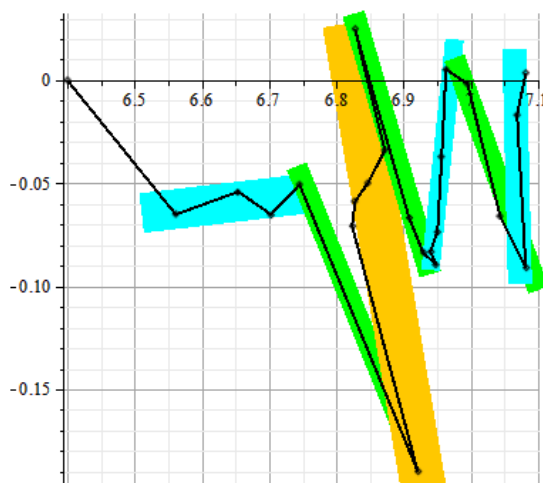


Рис. 4. Кластерная структура государственного бюджета Германии 1991–2012 гг.

Периодическая кластерная бюджетная структура такова, что имеет место чередование областей возрастания и убывания рентабельности ежегодных совокупных затрат. Так же как и в других рассмотренных экономиках, наблюдается отмеченный выше аналог дыхания МКЭС. Зависимость совокупных затрат от абсолютной рентабельности для семи кластеров Германии имеет вид

$$x_{r1} = 3378 R^{25}; x_{r2} = e^{6,7125} R^{-1,25}; x_{r3} = e^{6,8391} R^{-0,435}; x_{r4} = e^{6,8556} R^{-1,11};$$

$$x_{r4} = e^{6,86} R^{-1,11}; x_{r5} = e^{6,97} R^{0,31}; x_{r6} = e^{6,9867} R^{-1,11}; x_{r7} = e^{7,0642} R^{0,08}.$$

Идентификация кластеров показывает, что среди семи кластеров Германии n -кластеры отсутствуют, а все кластеры с четными номерами, которые соответствуют падению рентабельности, являются μ -кластерами.

Значения основных параметров расчета ν -кластерной структуры

$$\eta_1 = -7,7032; \eta_2 = -6,2832; \eta_3 = -6,4132; \eta_4 = -6,426202146;$$

$$\eta_5 = -6,544202146; \eta_6 = -6,55920; \eta_7 = -6,637202146.$$

$$C_1 = 2215k_1R^{26,35}; C_2 = 535k_2R^{-0,08}; C_3 = 610k_3R^{0,725}; C_4 = 618k_4R^{0,05};$$

$$C_5 = 695k_5R^{1,5}; C_6 = 706k_6R^{0,05}; C_7 = 763k_7R^{1,24}.$$

$$k_4 = 11,87; k_2 = 11,89; k_1 = 11,91; k_5 = 11,83; k_6 = 11,87; k_7 = 11,86.$$

Воспользовавшись понятием *скрытой денежной массы*, которая могла бы быть *вброшена* в МКЭС, проведем ее *нормировку*: будем, как и раньше, считать, что реальная денежная масса, участвующая в процессе производства и реализации конечного продукта МКЭС, составляет 20% от всей денежной массы. Тогда и максимальный поток совокупных затрат может составлять $\max x_r = 0,2 C$. Используя понятие функции цикла, представим величину совокупных затрат как $x_r = 0,2 C \Omega(t)$, определим функцию цикла экономики Германии: $\Omega(t) \equiv R(t)/R_{\max}$.

Характерной точкой является точка наименьшей рентабельности, принадлежащая третьему кластеру Германии и соответствующая бюджету 1995 г. Уравнение для определения k_3 – значения экономической постоянной Больцмана третьего кластера – записывается в виде

$$x_{r_3}(R_0) = 0,2 C_3(R_0) R_0/R_{\max} \Rightarrow k_3 \approx 11,83.$$

Динамика основных макроэкономических параметров Японии определяется согласно приведенной выше методике.

Таким образом, построенная модель МКЭС позволяет с единых позиций адекватно описать поведение всей периодической бюджетной кластерной структуры как системы ν -кластеров. Одновременно с ее описанием оказывается возможным определить динамику основных макроэкономических параметров в кластерах. Требование непрерывности параметров МКЭС при переходе между кластерами вместе с нормировкой скрытой денежной массы позволяет указанную динамику представлять в абсолютных единицах.

Литература

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
2. Качевский Д.Н. Термодинамика и статистика макроэкономических системы // Математическая теория систем МТС-09: труды междунар. конф. (Москва, 26-30 янв.) / Отделение нанотехнологий и информационных технологий РАН. М.: ИСА РАН, 2009. С. 155–159.
3. Качевский Д.Н. Макроэкономика с нулевым химическим потенциалом // Журнал экономической теории. 2012. № 2. С. 94–102.
4. Качевский Д.Н. Макроэкономика с химическим потенциалом // Журнал экономической теории. 2014. № 1. С. 192–199.
5. Качевский Д.Н. Кризис и инфляция // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2011: труды V междунар. конф. (Москва, 3-5 окт.). М.: ИПУ РАН, 2011. Т. I. С. 135–147.
6. Качевский Д.Н. Инфляция: динамические закономерности // Журнал экономической теории. 2010. № 1. С. 107–110.
7. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972. 400 с.
8. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W Function. *Advances in Computational Mathematics*, 1996, vol. 5, pp. 329–359.

References

1. Gradshtein I.S., Ryzik I.M. *Tablici integralov, summ, ryadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 1100 p.
2. Kachevsky D.N. *Termodinamika i statistika makroekonomicheskikh sistem* [Thermodynamics and macroeconomic systems statistics]. *Matematicheskaya teoriya sistem MTS-09: Truduy mejdunarodnoi konf. Otdelenie nanotekhnologii i informatsionnyh tehnologii (RAN. Moskva, 26-30 janv. 2009)* [Proc. of Int. Conf. «Mathematical systems theory MTS-09». Moscow, 2009, pp. 155–159.
3. Kachevsky D.N. *Makroekonomika s nulevim himicheskim potencialom* [Macroeconomics with zero chemical potential]. *Jurnal ekonomicheskoi teorii* [Journal of Economic Theory], 2012, no. 2, pp. 94–102.
4. Kachevsky D.N. *Makroekonomika s himicheskim potencialom* [Macroeconomics with chemical potential]. *Jurnal ekonomicheskoi teorii* [Journal of Economic Theory], 2014, no. 1, pp. 192–199.
5. Kachevsky D.N. *Krizis i inflyatsiya* [Crisis and inflation]. *Upravlenie razvitiem krupnomashtabnykh system MLSD'2011: trudy V mejdunar. konf.* [Proc. of 5th Int. Conf. «Management of large sale systems development. MLSD'2011». Moscow, 2011, vol. I, pp. 135–147.

6. Kachevsky D.N. *Inflatia: dinamicheskie zakonomernosti* [Inflation: dynamic patterns]. *Journal ekonomicheskoi teorii* [Journal of Economic Theory], 2010, no. 1, pp. 107–110.

7. Rumer Yu, Rivkin M.Sh. *Termodinamika, statisticheskaya fizika i kinetika* [Thermodynamics, statistical physics and kinetics]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 400 p.

8. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W Function. *Advances in Computational Mathematics*, 1996, vol. 5, pp. 329–359.

КАЧЕВСКИЙ ДМИТРИЙ НИКОЛАЕВИЧ – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (kachevskydn@mail.ru).

KACHEVSKY DMITRY – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Higher Mathematics Department, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.
